大纲之一：集合与函数

实数集$\mathbb{R}$、有理数与无理数的稠密性，实数集的界与确界、确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理.

$\mathbb{R}^2$上的距离、邻域、聚点、界点、边界、开集、闭集、有界（无界）集、$\mathbb{R}^2$上的闭矩形套定理、聚点定理、有限复盖定理、基本点列，以及上述概念和定理在$\mathbb{R}^n$上的推广.

函数、映射、变换概念及其几何意义，隐函数概念，反函数与逆变换，反函数存在性定理，初等函数以及与之相关的性质.

大纲之二：极限与连续(1)

数列极限、收敛数列的基本性质（极限唯一性、有界性、保号性、不等式性质）.

数列收敛的条件（Cauchy准则、迫敛性、单调有界原理、数列收敛与其子列收敛的关系），极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$及其应用.

一元函数极限的定义、函数极限的基本性质（唯一性、局部有界性、保号性、不等式性质、迫敛性），归结原则和Cauchy收敛准则，两个重要极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$及其应用，计算一元函数极限的各种方法，无穷小量与无穷大量、阶的比较，记号O与o的意义，多元函数重极限与累次极限概念、基本性质，二元函数的二重极限与累次极限的关系.

大纲之二：极限与连续(2)

函数连续与间断、一致连续性、连续函数的局部性质（局部有界性、保号性），有界闭集上连续函数的性质（有界性、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性）.

大纲之三：一元函数微分学

导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法，微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性.

微分学基本定理：Fermat定理，Rolle定理，Lagrange定理，Cauchy定理，Taylor公式(Peano余项与Lagrange余项).

一元微分学的应用：函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图象的讨论、洛必达（L'Hospital）法则、近似计算.

大纲之五：一元函数积分学(1)

原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法（直接积分法、换元法、分部积分法）、有理函数积分：$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$型，$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$型.

定积分及其几何意义、可积条件（必要条件、充要条件：$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$）、可积函数类.

定积分的性质（关于区间可加性、不等式性质、绝对可积性、定积分第一中值定理）、变上限积分函数、微积分基本定理、N-L公式及定积分计算、定积分第二中值定理.

大纲之五：一元函数积分学(2)

无限区间上的广义积分、Canchy收敛准则、绝对收敛与条件收敛、$f(x)$非负时$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性判别法（比较原则、柯西判别法）、Abel判别法、Dirichlet判别法、无界函数广义积分概念及其收敛性判别法.

微元法、几何应用（平面图形面积、已知截面面积函数的体积、曲线弧长与弧微分、旋转体体积），其他应用.

极限定义

用定义证明极限的关键在于证明N的存在性，为了使这一过程简单明了，假定n足够大并适当放大$|x_n - a|$是常用的技巧. 对于一些问题，“分段估计”的方法对于解题有帮助.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = a$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k}{2^n} = a$.

极限定义

在使用反证法解决某些问题时，会用到极限的否定定义.

设$a \in \mathbb{R}$. 若数列$\{x_n\}$的任一子列中都必有一个收敛于a的子列, 则$\{x_n\}$收敛于a.

证明数列$\{\sin n\}$发散.

数列极限的性质

极限的唯一性、有界性、四则运算性质在解决极限问题时都是常用到的.

设$\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\}$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0.$

证. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}) \\
&= a-1\cdot a \\
&= 0
\end{aligned}
$$

两边夹定理

Theorem 2.1 (两边夹定理)

设$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$是三个数列, 满足下列条件:
(i) 存在N，当$n > N$时, 总有$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$；
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$;
则$\{y_n\}$也收敛且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

设$a_i > 0, \quad i = 1, \cdots, m$，求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

求$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^n}$.

Theorem 2.2

单调有界数列必收敛.

设$a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \quad n = 1, 2, \cdots$. 求数列$\{x_n\}$的极限.

设$f : [a, b] \to [a, b]$满足对任何$x, y \in [a, b]$, 有

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|.$$

$x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛.

单调收敛定理

证．$x_1 \in [a,b]$，设$x_n \in [a,b]$，由$f(x_n) \in [a,b]$知$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} \in [a,b]$，因此由数学归纳法得对一切自然数$n$，有$x_n \in [a,b]$.

当$x_1 \geq f(x_1)$时，有$x_2 = \frac{x_1 + f(x_1)}{2} \leq x_1$．设$x_{n+1} \leq x_n$，则$f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq |f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq |x_n - x_{n+1}| = x_n - x_{n+1}$，于是

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + f(x_{n+1})}{2} \leq \frac{x_n + f(x_n)}{2} = x_{n+1}.$$

因此由数学归纳法得对一切自然数n，有$x_{n+1} \leq x_n$，即$\{x_n\}$为单减数列，故由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛.
同理，当$x_1 \leq f(x_1)$时，可证$\{x_n\}$为单增数列，同样由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛.

证明$e < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{3}{n}$.

证. 因为$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$严格递减趋于$e$, 所以$n > 1$时，有

$$(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n-1}) > (1+\frac{1}{n})^{n+1} > e,$$

于是

$$(1+\frac{1}{n})^n > \frac{n-1}{n}e.$$

上式对$n = 1$也成立，故对一切自然数n, 有

$$e < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{e}{n} < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{3}{n}.$$

施笃兹(Stolz)定理

Theorem 2.3

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, 满足下列条件

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$或$A=-\infty$);

(2) 数列$\{y_n\}$ 严格递增且趋向$+\infty$,

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

设$0<x_1<1,\ x_{n+1}=x_n(1-x_n),\quad n=1,2,\cdots$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

设$x_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{n^2}$, $n\in\mathbf{N}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Theorem 2.4

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：对于任何$\varepsilon > 0$，都存在正整数N，当$m > N$，$n > N$时，就有$|x_m - x_n| < \varepsilon$.

求证$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$收敛.

设存在常数$k \in (0, 1)$使得对任何$n > 1$，有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|.$$

证明数列$\{x_n\}$收敛.

柯西收敛原理

证. 由$|x_n - x_{n-1}| \leq k|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq k^{n-2}|x_2 - x_1|$知对任何自然数$p$, 有$|x_{n+p} - x_n| = |\sum_{i=n+1}^{n+p}(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p}|x_i - x_{i-1}| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p}k^{i-2}|x_2 - x_1| =$ $|x_2 - x_1|\dfrac{k^{n-1} - k^{n+p-1}}{1-k} \leq |x_2 - x_1|\dfrac{k^{n-1}}{1-k}$.

对任何$\varepsilon > 0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k^{n-1}}{1-k} = 0$知存在自然数$N$, 使得$n > N$时，有

$$|x_2 - x_1|\frac{k^{n-1}}{1-k} < \varepsilon.$$

于是$n > N$时，对任何自然数p, 有$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_2 - x_1|\dfrac{k^{n-1}}{1-k} < \varepsilon$. 根据柯西收敛原理，数列$\{x_n\}$收敛.

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi]}{(\sqrt{n^2+1}-n)\pi}=1.$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan(\sqrt{n^2+1}\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} n\tan[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi] = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)\pi = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

设$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx$且对任意$x \in (-\infty, +\infty)$有$|f(x)| \leq |\sin x|$，证明$|\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k| \leq 1$.

证. 当$x \neq 0$时，由$|f(x)| \leq |\sin x|$得$|\frac{f(x)}{x}| \leq |\frac{\sin x}{x}|$, 即

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{x}| \leq |\frac{\sin x}{x}|.$$

由于$\frac{\sin kx}{x} = \frac{\sin kx}{kx} k \to k \ (x \to 0)$, 上面的不等式两边令$x \to 0$取极限，得

$$|\sum_{k=1}^{n} ka_k| \leq 1.$$

设函数$f(x)$是从$[a,b]$到(a,b)的映射,且对任何$x,y\in[a,b]$,都有

$$|f(x)-f(y)|<\alpha|x-y|,\quad 0<\alpha<1,$$

求证存在唯一的$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

证. 任取一点$x_1\in[a,b]$, 令$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\dots)$, 则$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|<\alpha|x_n-x_{n-1}|$, 由此可推得$\{x_n\}$是Cauchy数列，从而收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 则$\xi\in[a,b]$. 由$0\le|f(x_n)-f(\xi)|<\alpha|x_n-\xi|$, 根据两边夹定理得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)$. 在$x_{n+1}=f(x_n)$两边令$n\to\infty$取极限，得$\xi=f(\xi)$, 即$\xi$是$f(x)$的一个不动点. 唯一性可以用反证法证明. 若还有$\eta\neq\xi$也是$f$的不动点，则$|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|<\alpha|\xi-\eta|$. 矛盾！
注. 满足这个例子中的条件的$f(x)$是$[a,b]$上的一个压缩映射. 将来使用上述方法的思想可以证明更一般的压缩映射原理.

设函数$f(x)$是从$[a,b]$到(a,b)的映射,且对任何$x,y\in[a,b]$,都有

$$|f(x)-f(y)|<\alpha|x-y|,\ \ 0<\alpha<1,$$

求证存在唯一的$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

证. 任取一点$x_1\in[a,b]$, 令$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$, 则$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|<\alpha|x_n-x_{n-1}|$, 由此可推得$\{x_n\}$是Cauchy数列，从而收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 则$\xi\in[a,b]$. 由$0\le|f(x_n)-f(\xi)|<\alpha|x_n-\xi|$, 根据两边夹定理得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)$. 在$x_{n+1}=f(x_n)$两边令$n\to\infty$取极限，得$\xi=f(\xi)$, 即$\xi$是$f(x)$的一个不动点. 唯一性可以用反证法证明. 若还有$\eta\ne\xi$也是$f$的不动点，则$|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|<\alpha|\xi-\eta|$. 矛盾!
注. 满足这个例子中的条件的$f(x)$是$[a,b]$上的一个压缩映射. 将来使用上述方法的思想可以证明更一般的压缩映射原理.

求作定义域为$\mathbb{R}$且只在点$x=a$和$x=b$连续而在其余点都不连续的函数.

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\{x_n\}$是$[a,b]$中的点列，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$, 证明存在$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=A$.

证. $\{x_n\}$有界，从而有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 设$\{x_{n_k}\}$收敛于点ξ, 则由$a\le x_{n_k}\le b$ $(k=1,2,\ldots)$知$\xi\in[a,b]$, 由$f(x)$在点ξ连续及$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$得

$$f(\xi)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=A.$$

求作定义域为$\mathbb{R}$且只在点$x = a$和$x = b$连续而在其余点都不连续的函数.

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，$\{x_n\}$是$[a, b]$中的点列，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$，证明存在$\xi \in [a, b]$，使得$f(\xi) = A$.

证. $\{x_n\}$有界，从而有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$\{x_{n_k}\}$收敛于点ξ，则由$a \leq x_{n_k} \leq b\ (k = 1, 2, \ldots)$知$\xi \in [a, b]$，由$f(x)$在点$\xi$连续及$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$得

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A.$$

Theorem 3.1 (局部有界性)

设函数$f(x)$在点x_0连续, 则函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有界.

Theorem 3.2 (局部保号性)

设函数$f(x)$在点x_0连续, 且$f(x_0) \neq 0$, 则函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内与$f(x_0)$同号, 并且存在$c > 0$, 使$|f(x)| \geqslant c$.

Theorem 3.3 (四则运算的连续性)

设函数$f(x)$和$g(x)$都在点x_0连续, 则函数$f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$都在点x_0连续. 如果还有$g(x_0) \neq 0$, 则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$也在点x_0连续.

Theorem 3.4 (复合函数的连续性)

设函数$y = g(x)$在点x_0连续, $y_0 = g(x_0)$, 函数$f(y)$在点y_0连续, 则复合函数$f(g(x))$在点x_0连续.

Theorem 3.5

所有初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

设函数$f(x)$在点x_0连续而$g(x)$在点x_0不连续. 判断函数$f^3(x) + g^3(x)$在点x_0是否必不连续? 说明理由.

Theorem 3.6 (有界定理)

闭区间上的连续函数必有界.

Theorem 3.7 (最大最小值定理)

闭区间上的连续函数必能取得最大值和最小值.

Theorem 3.8 (根的存在定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续并且$f(a)f(b)<0$, 则在(a,b)中必有方程$f(x)=0$的根.

Theorem 3.9 (介值定理)

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续且$f(a)\neq f(b)$, 则对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数C, 必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=C$.

闭区间上连续函数的性质

Corollary 3.10

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，M和m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则$f(x)$的值域是$[m,M]$.

Theorem 3.11 (一致连续性定理，康托尔(Cantor)定理)

闭区间上的连续函数必一致连续.

Example 3.12

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

证 用反证法. 假设$f(x)$在I上不是严格单调的, 则存在$x_1, x_2, x_3 \in I$满足$x_1 < x_2 < x_3$, $(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) \leqslant 0$, $f(x)$单射意味着$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$互不相等, 据此不妨设$f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$. 于是存在实数C满足

$$f(x_2) < C < \min\{f(x_1), f(x_3)\}.$$

在$[x_1, x_2]$与$[x_2, x_3]$上分别应用介值定理, 则存在$\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得

$$f(\xi_1) = C = f(\xi_2).$$

这与$f(x)$单射矛盾. 所以$f(x)$在I上严格单调.

设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续周期函数，证明存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(\xi+1)=f(\xi)$.

证. 令$F(x)=f(x+1)-f(x)$，则$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 设$T>0$是$f(x)$的一个周期，则$f(x)$在$[0,T]$上取得最大值，不妨设在$x_0\in[0,T]$处取得最大值，则由周期性，$f(x_0)$是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的最大值. 于是

$$F(x_0-1)=f(x_0)-f(x_0-1)\geq 0,\ F(x_0)=f(x_0+1)-f(x_0)\leq 0.$$

由$F(x)$的介值性，存在$\xi\in[x_0-1,x_0]$使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi+1)=f(\xi)$.

设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$p_1,p_2,\ldots,p_n$是n个正数. 证明对任意$x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$, 存在$x\in[a,b]$, 使得

$$p_1\int_x^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+\ldots+p_n\int_x^{x_n} f(t)\mathrm{d}t=0.$$

设$f(x)$在$[a,b)$连续无上界, 对于任意的$(\alpha,\beta)\subseteq[a,b)$, $f(x)$在(α,β)不取最小值. 证明$f(x)$在$[a,b)$严格递增.

设$f(x)$在(a,b)连续. 证明$f(x)$在(a,b)一致连续的充分必要条件为$\lim_{x\to a^+} f(x)$与$\lim_{x\to b^-} f(x)$都存在.

设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A < +\infty,$$

求证$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

证明$f(x)$在区间I上一致连续的充分必要条件是对任何满足条件$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$的数列$\{x_n\} \subseteq I$和$\{y_n\} \subseteq I$, 都有$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

求使得函数$f(x) = x^\alpha \sin x$在$(0,+\infty)$一致连续的实数α的取值范围.

实数集的界与确界、确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理.

设函数$f(x)$在$[a, b]$上递增且$f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$, 求证存在点$\xi \in [a, b]$, 使得$f(\xi) = \xi$.

证. 令$A = \{x | x \in [a, b], f(x) \geq x\}$, 则$a \in A$, 故$A$非空. 令$\xi = \sup A$, 则$\xi \in [a, b]$. 对任何$x \in A$, 由$f$的单增性有$x \leq f(x) \leq f(\xi)$, 从而$f(\xi)$是$A$的一个上界, 因此有$\xi \leq f(\xi)$. 另一方面, 由$\xi \leq f(\xi)$和$f$的单增性有$f(\xi) \leq f(f(\xi))$, 因此$f(\xi) \in A$, 于是有$f(\xi) \leq \xi$. 合起来就得到$f(\xi) = \xi$.

思考：用区间套定理或其它实数系基本定理来证明上面的结果.

设函数$f(x)$在$[a, b]$上只有第一类间断点，求证$f(x)$于$[a, b]$上有界.

提示：自己练习用不同的实数系基本定理来证明这个问题。比如，注意到对每一点$x \in [a, b]$，由于函数$f(x)$ 有左、右极限，可知$f(x)$在点x的某个邻域上有界，从而可以使用有限覆盖定理来证明本题.

导数

导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法，微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性等内容请自己复习.

设$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{0+\sqrt{x+\sqrt{0+\sqrt{x+\cdots}}}}}$, $f(a)=4$, 求$f'(a)$.

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上两次连续可导且对任意x, h, 都有$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$, 求证$f(x)=ax^2+bx+c$, 其中$a,b,c$都是常数.

证. 在$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$中令$x=0$, 得到$f(h)-f(0)=hf'\left(\frac{h}{2}\right)$. 在$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$两边对$h$求导，得$f'(x+h)=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+hf''\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{1}{2}$, 上式中令$x=-\frac{h}{2}$, 得$f'\left(\frac{h}{2}\right)=f'(0)+\frac{f''(0)}{2}h$. 所以综合上面的结果，有$f(h)=f(0)+hf'\left(\frac{h}{2}\right)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2}h^2$.

Theorem 5.1 (费马定理)

设点x_0是函数$f(x)$的一个极值点且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0)=0$.

Theorem 5.2 (罗尔定理)

设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且$f(a)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

Theorem 5.3 (拉格朗日中值定理)

设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Theorem 5.4 (柯西中值定理)

设$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$连续，在(a,b)可导且当$x\in(a,b)$时，$g'(x)\neq 0$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Theorem 5.5 (达布(Darboux)定理)

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$可导，则对于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间的一切值η，必存在$\xi\in[a,b]$，使得$f'(\xi)=\eta$.

设$f(x)$在$[0,1]$上n次连续可导，在$(0,1)$中$n+1$次可导，且$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. 证明存在$\xi \in (0,1)$, 使得$f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$.

证. 令$F(x) = [f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x)]e^{-x}$, $(x \in [0,1])$, 则$F(x)$在$[0,1]$ 上连续，在$(0,1)$上可导, 且

$$F'(x) = [f^{(n+1)(x) - f(x)}]e^{-x}.$$

由于$F(0) = F(1) = 0$, 根据Rolle定理，存在$\xi \in (0,1)$, 使得$F'(\xi) = 0$, 从而有

$$f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi).$$

设$f(x)$在$[0,1]$上n次连续可导，在$(0,1)$中$n+1$次可导，且$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$. 证明存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$.

证. 令$F(x)=[f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n-1)}(x)+f^{(n)}(x)]e^{-x}$, $(x\in[0,1])$, 则$F(x)$在$[0,1]$ 上连续，在$(0,1)$上可导, 且

$$F'(x)=[f^{(n+1)(x)-f(x)}]e^{-x}.$$

由于$F(0)=F(1)=0$, 根据Rolle定理，存在$\xi\in(0,1)$, 使得$F'(\xi)=0$, 从而有

$$f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi).$$

设$f(x)$在$[0,1]$可微，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明对任意n个正数a_1，a_2，...，a_n，在$(0,1)$内存在n个不同的数$x_1,x_2,\ldots,x_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$两次连续可微，对任意实数x，有$|f(x)|\leqslant 1$，且$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$. 证明存在一点ξ使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

设$f(x)$在$[a,b]$可导，在(a,b)两次可导. 证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a).$$

洛必达法则

设$f(x)$在$(a,+\infty)$中可微且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$, 求证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

因为$\mathrm{e}^x\to+\infty\quad(x\to+\infty)$, 故由洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\mathrm{e}^x f(x))'}{(\mathrm{e}^x)'}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)}{\mathrm{e}^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

设$f(x)$在$(a,+\infty)$中两次可微且$\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)]=0$，求证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

提示：$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=(x^2f(x))''$.

设$0 < x < \frac{\pi}{2}$, 证明$\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

设$f(x)$在$(0, +\infty)$上可导且$f(x)$恒大于0，对任意$x > 0$, 有$f(f(x)) = x$, 并且存在$a > 0$使得$f(a) \neq a$. 求证$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

设$f(x)$在$(0, +\infty)$上两次可导且$f'(x)$恒大于0，对任意$x > 0$, 有

$$f(f'(x)) = -f(x).$$

找出所有满足上述条件的函数$f(x)$.

设$f(x)$在$[a, b]$上两次可微且$f(a) = f(b) = 0$, $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$, 其中$g(x)$为一给定函数。求证在$[a, b]$上有$f(x) \equiv 0$.

若函数$f(x)$在区间I下凸，则对任何$x_1, x_2, x_3 \in I$， $x_1 < x_2 < x_3$，都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2};$$

反之，若对任何$x_1, x_2, x_3 \in I$， $x_1 < x_2 < x_3$， $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$， $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$， $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$中的一个恒成立，则函数$f(x)$在区间$I$下凸.

利用上面的结果不难证明开区间上的凸函数处处都有两个单侧导数，从而开区间上的凸函数是连续函数.

设$p_i \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, n$且$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad f(x)$下凸. 证明琴生(Jensen)不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

利用凸性能证明荷达(Hölder)不等式、闵科夫斯基(Minkowski)不等式等很多不等式. 各种参考书上有大量的例子，请自己复习.

设$f(x)$在$[a,b]$上两次可导且$f'(\frac{a+b}{2})=0$,求证存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证. 将$f(x)$在$\frac{a+b}{2}$处展开，得

$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2\quad(a<\xi_1<\frac{a+b}{2})$

$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(\frac{b-a}{2})^2\quad(\frac{a+b}{2}<\xi_2<b)$

两式相减后再取绝对值，得$|f(b)-f(a)|=|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(\frac{b-a}{2})^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2|\leq\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}(\frac{b-a}{2})^2$. 将$|f''(\xi_1)|$, $|f''(\xi_2)|$中大的那一个对应的ξ_i取为ξ, 则$|f(b)-f(a)|\leq|f''(\xi)|(\frac{b-a}{2})^2$.

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上两次可导且对所有$x \in (a,+\infty)$, 有

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2,$$

其中M_0和M_2都是常数.令

$$M_1 = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f'(x)|,$$

求证$M_1 \leq 2M_0^{\frac{1}{2}} M_2^{\frac{1}{2}}$.

求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$.

泰勒公式

设$f(x)$在$[a,b]$上两次连续可导，在(a,b)上三次可导. 证明存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(b) & b^2 & b & 1 \\ f(a) & a^2 & a & 1 \\ f'(a) & 2a & 1 & 0 \\ f''(a) & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -f'''(\xi)\frac{(b-a)^3}{3}.$$

原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法（直接积分法、换元法、分部积分法）、有理函数积分：$\int R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$型，$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$型等内容请自己复习.

求$\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\mathrm{d}x$.

求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

证明对任意正整数n,有

$$\left(\frac{2n-1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < (2n-1)!! < \left(\frac{2n+1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

设$\varphi(x)$在$[a,b]$上可积，其值域包含在$[A,B]$中，$f(x)$在$[A,B]$上连续. 求证复合函数$f(\varphi(x))$在$[a,b]$上可积.

证. 对任何$\eta>0$和$\sigma>0$，由$f(x)$在$[A,B]$上连续知$f(x)$在$[A,B]$上一致连续，从而存在$\delta>0$，当$x',x''\in[A,B]$且$|x'-x''|\le\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|<\eta$. 又因为$\varphi(x)$在$[a,b]$上可积，由可积的第二充要条件，对上述$\delta>0$和$\sigma>0$，存在$[a,b]$上的网T，使得$\omega_{k'}(\varphi)>\delta$的网孔长度之和$\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\sigma$. 注意到只有在$\varphi(x)$的振幅大于$\delta$的网孔上，$f(\varphi(x))$的振幅才可能大于$\eta$，所以$\omega_{k''}(f(\varphi))>\eta$的那些网孔长度之和满足

$$\sum_{k''}\Delta x_{k''}\le\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\sigma.$$

于是由可积的第二充要条件知复合函数$f(\varphi(x))$在$[a,b]$上可积.

设$f(x)$在区间$[0,\pi]$上连续且满足

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0 = \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx,$$

求证$f(x)$在$(0,\pi)$中至少有两个零点.

证明思路. 如果$f(x)$在$(0,\pi)$中没有零点，则由介值定理，$f(x)$在$(0,\pi)$中恒大于0或恒小于0，从而$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx$大于0或小于0，与题设条件矛盾！这就证明了$f(x)$在$(0,\pi)$中至少有一个零点. 如果$f(x)$在$(0,\pi)$中恰有一个零点$\alpha$, 则由介值定理和$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = 0$可知$f(x)$在$(0,\alpha)$和$(\alpha,\pi)$上一边恒正，一边恒负，这时考虑$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-\alpha)dx$, 可以和前面的推理一样导出矛盾.

求$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

求$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$，其中$a$，$b$是正数.

求$\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$，$|a|<1$，其中$x=\frac{\pi}{2}$处被积函数的值理解为极限值.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = 0, \qquad p \in \mathbb{N}^*.$

设$\lambda > 0$, $0 < a < b$, 证明

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \right| < \frac{2}{a}.$$

设$f(x)$在$[a,b]$上连续可微，求证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证明　由积分中值定理和连续函数的最大值存在定理，存在ξ，$\eta\in[a,b]$使得$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(\xi)|$，$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\eta)|$. 从而有

$$0\leqslant|f(\xi)|-|f(\eta)|\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant\left|\int_\eta^\xi f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

此即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，m，M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，$0<m\le M$. 证明

$$(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x)(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

设$f(x)$在$[a,b]$上两次连续可微，$f(a)=f(b)=0$. 证明

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

包含定积分的极限式

若$f(x)$在$[A,B]$可积, $A<a<b<B$, 求证

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\mathrm{d}x} = f(1).$$

定积分的应用

微元法、几何应用（平面图形面积、已知截面面积函数的体积、曲线弧长与弧微分、旋转体体积），其他应用等内容请自己复习.

求平面区域$\{(x,y)|x^4+y^4\leqslant x^2-x^2y^2+y^2\}$的面积.